

- 5.1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?

Ответ. В 2022 году.

Решение. В 2010, 2011, ..., 2019 годах и в 2021 году в номере года есть единица, и если её поставить на первое место, число заведомо уменьшится. Число 2020 можно уменьшить до 2002. А вот число 2022 нельзя уменьшить, переставляя цифры

Рекомендации по проверке

7 баллов – верное решение

1 балл – просто приведен ответ

- 5.2. У Винни-Пуха есть банки с медом. В двух – по 2 л меда, в трех – по 3 л меда, в четырех – по 4 л меда, в пяти – по 5 л меда. Помогите Винни-Пуху расставить банки на двух полках так, чтобы на них было поровну как банок, так и меда.

Например, $5+5+5+4+4+2+2=27$ л в 7 банках – первая полка, $5+5+4+4+3+3+3=27$ л в 7 банках – вторая полка.

Рекомендации по проверке

Правильный пример – 7 баллов

- 5.3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получится то же самое число, что и в остатке. Ответ обоснуйте.

Ответ: 6, 12, 18 24.

При делении на пять могут получаться остатки 0, 1, 2, 3, 4. Тогда, зная, что частное равно остатку, можно восстановить искомые числа:

Поскольку ноль не является натуральным числом, то искомым чисел — четыре.

Остаток	Частное	Исходное число
0	0	$0 \cdot 5 + 0 = 0$
1	1	$1 \cdot 5 + 1 = 6$
2	2	$2 \cdot 5 + 2 = 12$
3	3	$3 \cdot 5 + 3 = 18$
4	4	$4 \cdot 5 + 4 = 24$

Рекомендации по проверке

7 баллов – верное обоснованное решение

5 баллов – верное обоснованное решение, но не отброшен ноль

5 баллов – верные рассуждения, но допущена одна арифметическая ошибка

2 балла – приведен только верный ответ

0 баллов – приведен только ответ, в котором есть ошибки

- 5.4. У Карлсона было две полные банки варенья. Одна из банок в три раза больше другой. Когда в маленькой банке осталось 2 литра варенья, а в большой – 13 литров, Карлсон долил доверху маленькую банку из большой. В результате в большой банке осталась половина первоначального количества варенья. Найдите объем банок с вареньем.

Ответ: в большой банке было 18 литров, а в маленькой — 6 литров.

Первый способ. Пусть в большой банке содержится 6 частей варенья, тогда в маленькой банке — 2 части варенья. Половина от большой банки — 3 части варенья. 13 литров большой банки и 2 литра малой составляют вместе половину объема большой банки и весь объем маленькой банки (то есть, 5 частей). Значит, 5 частей варенья имеют объем 15 литров. Тогда 1 часть — 3 литра, следовательно, в большой банке было 18 литров, а в маленькой — 6 литров.

Рассуждения можно подкрепить рисунком.

Второй способ. Пусть из большой банки в маленькую перелили x литров варенья. Тогда в большой банке стало $(13 - x)$ литров, а в маленькой $(2 + x)$ литров. Следовательно, объем большой банки $2(13 - x)$. Зная, что объем маленькой банки составляет треть от объема большой, составим уравнение: $3(x + 2) = 2(13 - x)$. Решая уравнение, получим, что $x = 4$.

Тогда объем большой банки равен $2(13 - 4) = 18$ (л), а объем маленькой банки равен $4 + 2 = 6$ (л).

Рекомендации по проверке

7 баллов – верное обоснованное решение

3 балла – приведен верный ответ и проверено, что он действительно удовлетворяет условию

2 балла – приведен только верный ответ

- 6.1. На доске было написано трехзначное число, не содержащее нулей в своей записи. Из него получили три двузначных числа: первое – вычеркиванием первой цифры, второе – вычеркиванием второй цифры (из исходного числа), третье – вычеркиванием третьей цифры (из исходного числа). Найдите исходное число, если сумма трех полученных чисел равна 37.

Ответ. 113.

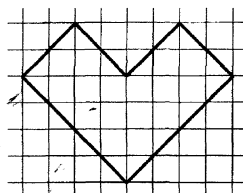
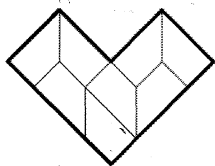
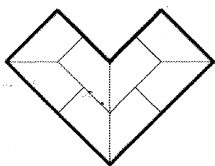
Число не может начинаться с 2 или большей цифры, так как сумма полученных чисел будет больше 40. Значит, оно начинается с 1, т.е. имеет вид $\overline{1ab}$. Тогда $\overline{1a} + \overline{1b} + \overline{ab} = 37$, т.е. $a + b + \overline{ab} = 17$. Отсюда сразу следует, что $a = 1$, а тогда $b = 3$.

Рекомендации по проверке

7 баллов – ответ с проверкой, но без объяснений

3 балла – только ответ без проверки

- 6.2. Разрежьте фигуру на 8 одинаковых частей



Рекомендации по проверке

7 баллов – приведен один из верных способов

- 6.3. Мальчики 6 «Б» класса принесли на весенний бал по букету из 7 тюльпанов каждый. Так как на всех одноклассниц букетов не хватило, они составили новые букеты по 5 тюльпанов и подарили их девочкам и классной руководительнице. Сколько девочек в этом классе, если всего учеников в нем больше, чем 20, но меньше, чем 30?

Ответ: в классе 13 девочек.

Общее количество тюльпанов кратно 7 и кратно 5. То есть их может быть 35, 70, 105 и т. д. Число 35 не является решением, так как в этом случае мальчиков — 5, а девочек (вместе с классной руководительницей) — 7, то есть общее количество детей меньше 20. Число 70 является решением, так как в этом случае получается, что в классе 10 мальчиков и 14 девочек (вместе с классной руководительницей). Число 105 не является решением, так как в этом случае мальчиков — 15, а девочек (вместе с классной руководительницей) — 21, то есть в классе — больше 30 детей. По тем же соображениям все числа, большие 105, не являются решением.

Рекомендации по проверке

7 баллов – верное обоснованное решение

5 баллов – приведен верный ответ, проверено, что он удовлетворяет условию, но не доказано, что других решений нет

3 балла – приведены верные рассуждения, но в ответе получено 14

2 балла – приведен только верный ответ

6.4. Робинзон попал на необитаемый остров. Каждый день (начиная с дня, когда он попал на остров) он вырезал на доске первую букву в названии дня недели на русском языке. На 60-й день, вырезав букву, он посчитал вырезанные буквы. Оказалось, что разных букв было вырезано разное количество. В какой день недели Робинзон попал на остров?

Ответ. В среду.

Заметим, что в течение недели Робинзон вырежет на доске по две буквы «п» (понедельник, пятница), «в» (вторник, воскресенье), «с» (среда, суббота) и одну букву «ч». Так как $60 = 56 + 4 = 7 \cdot 8 + 4$, то через 56 дней будет вырезано по 16 букв «п», «в», «с» и 8 букв «ч». Через четыре дня количества букв оказались различными. Для этого нужно, чтобы в эти четыре дня одна из букв «п», «в», «с» появилась дважды, одна — один раз, и одна не появлялась. Значит, четвертой появлявшейся буквой должна была быть «ч». Но буквы идут в следующем порядке: «п», «в», «с», «ч», «п», «с», «в», «п», «в», «с». Т.е. возможна лишь ситуация: «с», «ч», «п», «с». А это означает, что Робинзон попал на остров в среду.

Рекомендации по проверке

7 баллов — верное решение

3 балла — только ответ без объяснений

- 7.1. На доске было написано трехзначное число, не содержащее нулей в своей записи. Из него получили три двузначных числа: первое – вычеркиванием первой цифры, второе – вычеркиванием второй цифры (из исходного числа), третье – вычеркиванием третьей цифры (из исходного числа). Найдите исходное число, если сумма трех полученных чисел равна 295.

Ответ. 998.

Из представления $295 = 98 \cdot 3 + 1$ следует, что либо два из слагаемых равны 98, а одно – 99 (тогда исходное число было 998), либо два слагаемых равны 99, а одно – 97 (это невозможно, потому что любая цифра встречается хотя бы в двух из полученных чисел).

Рекомендации по проверке

7 баллов – ответ с проверкой, но без объяснений

3 балла – только ответ без проверки

- 7.2. Составьте какой-нибудь квадрат из трехклеточных «уголков» и прямоугольников 1×3 так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. Фигурки можно поворачивать.

Например, это можно сделать так, как показано на рис. 1.

Замечание. Приведенный пример – не единственный.

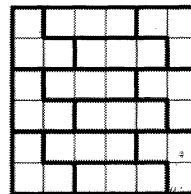


Рис. 1

Рекомендации по проверке

7 баллов – приведен верный способ

- 7.3. У Малыша была банка с вареньем. В первый раз Карлсон съел 20% варенья из банки, а во второй – 20% того, что осталось. После этого Фрекен Бок долила в банку 25% того, что в ней еще оставалось. В результате этого в банке стало варенья на пол-литра меньше, чем было первоначально (до того, как Карлсон начал есть варенье). Сколько литров варенья было в банке первоначально?

Первый способ. Пусть сначала в банке было x литров варенья. После того, как Карлсон в первый раз съел варенье, в банке осталось $0,8x$ литров варенья. Во второй раз в банке осталось $0,8 \cdot 0,8x = 0,64x$ литра варенья. Когда Фрекен Бок долила варенье, в банке стало $0,64x + 0,16x = 0,8x$ литров варенья, то есть, на $0,2x$ литра меньше, чем было первоначально, что по условию составляет $0,5$ литра варенья. Тогда $0,2x = 0,5$; $x = 2,5$.

Второй способ. Можно сразу составить уравнение: $(x - 0,2x) \cdot 0,8 + 0,25 \cdot (x - 0,2x) \cdot 0,8 = x - 0,5$, решением которого является $x = 2,5$.

Рекомендации по проверке

7 баллов – верное обоснованное решение

5 баллов – верное решение, но в конце допущена арифметическая ошибка, не нарушая логики решения

3 балла – уравнение составлено, но не решено

2 балла – приведены верные соображения, но уравнение не составлено, либо приведен только верный ответ

7.4. Робинзон попал на необитаемый остров. Каждый день (начиная с дня, когда он попал на остров) он вырезал на доске первую букву в названии дня недели на русском языке. На 101-й день, вырезав букву, он посчитал вырезанные буквы. Оказалось, что разных букв было вырезано разное количество. В какой день недели Робинзон попал на остров?

Ответ. В воскресенье.

Заметим, что в течение недели Робинзон вырежет на доске по две буквы «п» (понедельник, пятница), «в» (вторник, воскресенье), «с» (среда, суббота) и одну букву «ч». Так как $101 = 98 + 3 = 7 \cdot 14 + 3$, то через 98 дней будет вырезано по 28 букв «п», «в», «с» и 14 букв «ч». Через три дня количества букв оказались различными. Для этого нужно, чтобы в эти три дня одна из букв «п», «в», «с» появилась дважды, одна — один раз, и одна не появлялась. Значит, буквы «ч» среди них не будет. Но буквы идут в следующем порядке: «п», «в», «с», «ч», «п», «с», «в», «п», «в», «с». Т.е. возможна лишь ситуация: «в», «п», «в». А это означает, что Робинзон попал на остров в воскресенье.

Рекомендации по проверке

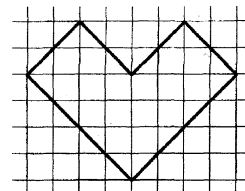
7 баллов – верное решение

3 балла – только ответ без объяснений

- 5.1. У 2009 года есть такое свойство: меняя местами цифры числа 2009, нельзя получить меньшее четырёхзначное число (с нуля числа не начинаются). В каком году это свойство впервые повторится снова?
- 5.2. У Винни-Пуха есть банки с медом. В двух – по 2 л меда, в трех – по 3 л меда, в четырех – по 4 л меда, в пяти – по 5 л меда. Помогите Винни-Пуху расставить банки на двух полках так, чтобы на них было поровну как банок, так и меда.
- 5.3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 5 в частном получится то же самое число, что и в остатке. Ответ обоснуйте.
- 5.4. У Карлсона было две полные банки варенья. Одна из банок в три раза больше другой. Когда в маленькой банке осталось 2 литра варенья, а в большой – 13 литров, Карлсон долил доверху маленькую банку из большой. В результате в большой банке осталась половина первоначального количества варенья. Найдите объем банок с вареньем.

- 6.1. На доске было написано трехзначное число, не содержащее нулей в своей записи. Из него получили три двузначных числа: первое – вычеркиванием первой цифры, второе – вычеркиванием второй цифры (из исходного числа), третье – вычеркиванием третьей цифры (из исходного числа). Найдите исходное число, если сумма трех полученных чисел равна 37.

- 6.2. Разрежьте фигуру на 8 одинаковых частей



- 6.3. Мальчики 6 «Б» класса принесли на весенний бал по букету из 7 тюльпанов каждый. Так как на всех одноклассниц букетов не хватило, они составили новые букеты по 5 тюльпанов и подарили их девочкам и классной руководительнице. Сколько девочек в этом классе, если всего учеников в нем больше, чем 20, но меньше, чем 30?
- 6.4. Робинзон попал на необитаемый остров. Каждый день (начиная с дня, когда он попал на остров) он вырезал на доске первую букву в названии дня недели на русском языке. На 60-й день, вырезав букву, он посчитал вырезанные буквы. Оказалось, что разных букв было вырезано разное количество. В какой день недели Робинзон попал на остров?

- 7.1. На доске было написано трехзначное число, не содержащее нулей в своей записи. Из него получили три двузначных числа: первое – вычеркиванием первой цифры, второе – вычеркиванием второй цифры (из исходного числа), третье – вычеркиванием третьей цифры (из исходного числа). Найдите исходное число, если сумма трех полученных чисел равна 295.

- 7.2. Составьте какой-нибудь квадрат из трехклеточных  «уголков» и прямоугольников  1×3 так, чтобы каждая фигурка граничила (имела общий отрезок) с фигурками обоих типов. Фигурки можно поворачивать.

- 7.3. У Малыша была банка с вареньем. В первый раз Карлсон съел 20% варенья из банки, а во второй – 20% того, что осталось. После этого Фрекен Бок долила в банку 25% того, что в ней еще оставалось. В результате этого в банке стало варенья на пол-литра меньше, чем было первоначально (до того, как Карлсон начал есть варенье). Сколько литров варенья было в банке первоначально?

- 7.4. Робинзон попал на необитаемый остров. Каждый день (начиная с дня, когда он попал на остров) он вырезал на доске первую букву в названии дня недели на русском языке. На 101-й день, вырезав букву, он посчитал вырезанные буквы. Оказалось, что разных букв было вырезано разное количество. В какой день недели Робинзон попал на остров?